SF1624 Algebra och geometri

Åttonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

10 november, 2009

Linjära avbildningar

Definition (linjär avbildning)

En funktion, eller avbildning, T från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är linjär om den respekterar addition och multiplikation med skalär, dvs om

- $T(\overline{u}+\overline{v}) = T(\overline{u}) + T(\overline{v}),$ $\quad \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}^n,$
- $T(a\overline{u}) = aT(\overline{u}),$ $\quad \overline{u} \in \mathbb{R}^n,\ a \in \mathbb{R}.$

Exempel

Om $\overline{v}$ är en nollskild vektor i $\mathbb{R}^3$ får vi att

- $T(\overline{u}) = \mathrm{Proj}_{\overline{v}}\,\overline{u}$ $\quad$ från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$,
- $T(\overline{u}) = \overline{u} \cdot \overline{v}$ $\quad$ från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}$ $(= \mathbb{R}^1)$,
- $T(\overline{u}) = \overline{u} \times \overline{v}$ $\quad$ från $\mathbb{R}^3$ till $\mathbb{R}^3$,

är linjära avbildningar, medan $T(\overline{u}) = \mathrm{Proj}_{\overline{u}}\,\overline{v}$ inte är linjär eftersom $T(a\overline{u}) = \mathrm{Proj}_{a\overline{u}}\,\overline{v} = \mathrm{Proj}_{\overline{u}}\,\overline{v} = T(\overline{u})$ för $a \neq 0$.

Linjära avbildningar med matriser

Sats

En avbildning T från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ är linjär precis om den går att bekriva med en matris genom

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Notera

Det kan nu vara praktiskt med att skriva vektorer i $\mathbb{R}^n$ som kolonnvektorer, dvs som $n \times 1$-matriser. Om vi vill skriva dem som rader för att apara plats kan vi markera det med transponat.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{u}^t.$$

Linjärkombination

Vi kan se detta som en linjärkombination

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Standardbasen

Precis som i planet och rummet kan vi beskriva alla vektorer med hjälp av koordinatvektorerna. Dessa utgör den så kallade standardbasen i $\mathbb{R}^n$, dvs

$$\overline{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^t, \overline{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^t, \ldots, \overline{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)^t.$$

Sats

Kolonnvektorerna i A är avbildningens värden på standarbasen

$$T(\overline{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, T(\overline{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix}, \ldots, T(\overline{e}_n) = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Rotation i planet

Rotation av planet med en vinkel θ är en linjär avbildning. Matrisen får vi av

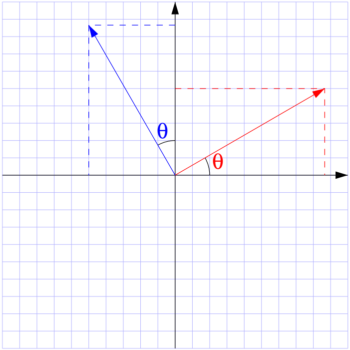
$$T(\bar{e}_x) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

och

$$T(\bar{e}_y) = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Alltså är

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$



Sammansättning

Om vi har en avbildning T från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ och en annan avbildning S från $\mathbb{R}^m$ till $\mathbb{R}^k$ får vi en sammansatt avbildning ST från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^k$ genom

$$ST(\overline{u}) = S(T(\overline{u})), \qquad \overline{u} \in \mathbb{R}^n.$$

Sats

Om S och T är linjära med matriser A och B så gäller att

- *ST är linjär*
- *Matrisen för ST är AB* – *(matrismultiplikation).*

Sammansättning av rotationer i planet

Om vi först roterar med en vinkel θ och sedan med en vinkel ϕ får vi

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\theta - \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\sin\theta + \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) & -\sin(\phi+\theta) \\ \sin(\phi+\theta) & \cos(\phi+\theta) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$